Evaluation des options par la transformée de Fourier

Bogdan Negrea [¤]

Juin 2001[y]

Abstract

Le modèle de Black et Scholes a pour hypothèse la constance de la volatilité associée à la distribution risque-neutre. Néanmoins, plusieurs études empiriques (Taylor, Hull-White, Lamoureux-Lastrapes, Bakshi etc.) montrent que cette hypothèse doit être remise en cause. Par ailleurs, certains auteurs - parmi lesquels Stein et Stein (1991), Heston (1993) et Bashki (1997) et (2000), propose l'utilisation de la transformée de Fourier de la densité des prix terminaux ou des probabilités risque-neutre associés à la détention de l'actif conditionnel, pour établir le juste prix d'une option.

Dans cet article nous proposons un modèle d'évaluation stochastique - recourant à la transformée de Fourier du prix de l'option. Il s'agit d'un modèle d'évaluation des options européennes caractérisé par deux variables d'état: le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité du prix de l'actif sous-jacent. En modélisant les processus stochastiques suivis par les variables d'état nous obtenons une équation aux dérivées partielles dont la solution donne le prix de l'actif dérivé. Nous proposons une solution de cette équation aux dérivées partielles en utilisant la transformée de Fourier. Nous montrerons qu'en appliquant la transformée de Fourier, la résolution de l'EDP du second ordre implique la résolution d'une EDO. Nous tenons compte qu'il existe une corrélation ½ entre le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité et qu'il existe deux sources de risque: de rendement et de volatilité. Nous commençons par quelques rappels concernant les transformées et leur utilisation dans le cadre de l'évaluation des options. Ensuite, après avoir présenter les hypothèses du modèle, nous proposons une formule d'évaluation pour les options européennes quand la volatilité est stochastique. Nous concluons en…n sur les propriétés du modèle.

Mots clefs : Evaluation d'option, Volatilité stochastique, Transformée de Fourier, Prévision de la volatilité.

Classi…cation JEL : G.10, G.12, G.13.

[¤] TEAM - ESA 8059 du CNRS - Université of Paris I Panthéon-Sorbonne. TEAM-MSE, 106-112 Bd de l'Hôpital F-75647 Paris Cedex 13 FRANCE. Tel: (+33 1) 44 07 82 71/70 (facsimile).E-mail: Negrea@univ-paris1.fr.

[y] Je remercie Thierry Chauveau pour son aide et ses commentaires au cours de l'élaboration de cet article. Les erreurs ou omissions sont de ma responsabilité.

Evaluation des options par la transformée de Fourier

1 Introduction

Le travail de Black et Scholes (1973) sur l'évaluation des options représente le développement le plus utilisé de la …nance. Au niveau pratique, l'évaluation des options ainsi que la couverture des produits dérivés est gouvernée par le modèle de Black et Scholes, à condition que ce prix soit obtenu à l'aide des paramètres de volatilité implicite donnés par le modèle. Il s'agit, en e¤et, sans aucun doute, du premier modèle théorique d'évaluation à avoir été utilisé de manière aussi intensive par les praticiens à des …ns d'évaluations, de spéculation ou simplement de couverture.

Les études empiriques ont montré que la volatilité de l'actif sous-jacent n'est pas constante, ce qui contredit l'hypothèse de Black et Scholes d'une volatilité qui ne varie pas. Cette raison représente le fondement de nombreuses recherches sur des extensions du modèle de Black et Scholes. Une théorie alternative du modèle de Black et Scholes considère que la volatilité suit un processus de di¤usion autonome, dirigé par un deuxième processus brownien. Cette nouvelle génération de modèles d'évaluation est dénommée la génération des "modèles d'évaluation à volatilité stochastique". Les études économétriques ont montré que l'évaluation des options à volatilité stochastique peut contribuer à l'explication des e¤ets de "smile" et "skew" et, aussi, peut conduire à une théorie plus réaliste de la structure par terme de la volatilité implicite.

Le fait que les variations de la variance des rendements d'un actif ne puissent être que partiellement expliquées par les mouvements de son prix a amené plusieurs chercheurs, comme Wiggins (1987), Hull et White (1987, 1988), Stein et Stein (1991), Heston (1993), Bates (1997), Bakshi, Cao et Chen(1997, 2000), à conclure que la volatilité des rendements d'un actif pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spéci…que. Ces auteurs supposent que le prix d'une option est fonction du prix de l'actif sous-jacent et de l'écart type des rendements de cet actif. Dans ce contexte, les variations non-anticipées du prix d'un call sont expliquées par les variations aléatoires du prix de l'actif support et par les variations de la volatilité. Ainsi, Hull et White(1987) proposent une formule analytique a…n de calculer le prix d'une option call européenne en utilisant le développement en série Taylor autour du point dont la volatilité n'est pas stochastique. Stein et Stein(1991) utilisent la transformée de Fourier a…n de trouver la distribution du prix de l'actif sous-jacent tandis que Heston(1993) obtient une formule analytique du prix des options à partir de la fonction caractéristique de la probabilité risque-neutre et de l'inverse de la transformée de Fourier. Les formules trouvées par ceux-ci dépendent du nombre complexe i (où $i^2 =$ ¡1) ce qui implique des di¢cultés en les appliquant en pratique.

Les chercheurs ont proposé plusieurs processus stochastiques en définissant la volatilité. Par exemple, Hull et White ont considéré le processus suivant :

$$d\sigma_t^2 = \mu\sigma_t^2 dt + \delta\sigma_t^2 dw_t \tag{1}$$

où w_t est un mouvement brownien et les paramètres de la diffusion μ et δ sont des constantes.

Stein et Stein considéraient le processus suivant :

$$d\sigma_t^2 = -\xi(\sigma_t - \theta)dt + kdw_t \tag{2}$$

où ξ et θ sont des constantes qui représentent le retour à la moyenne et la valeur moyenne de la volatilité.

Nous considérerons la forme générale suivante du processus de diffusion suivi par la volatilité :

$$d\sigma_t^2 = (\mu\sigma_t^2)dt + \delta(\sigma_t^\alpha)dw_t \tag{3}$$

En supposant que $\alpha = 2$, l'équation différentielle stochastique devient :

$$d\sigma_t^2 = \mu\sigma_t^2 dt + \delta\sigma_t^2 dw_t$$

où μ et δ représentent la valeur moyenne de la volatilité et, respectivement la volatilité de la volatilité qui sont supposées constantes.

Le modèle d'évaluation que nous proposons est un modèle d'équilibre dans lequel le prix d'une option est une fonction des deux variables d'état : le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité. Avant de pouvoir appliquer ce modèle, il faut que nous estimions le processus stochastique qui caractérise l'évolution de la volatilité dans le temps. C'est évident que la volatilité n'est ni une constante, ni une fonction déterministe du prix de l'actif support. Ce fait étant admis, il est nécessaire de réaliser des études économétriques qui puissent déterminer les paramètres de la diffusion suivie par la volatilité. Afin de pouvoir appliquer la formule que nous proposons, on peut donc suivre deux approches. Une première approche a été développé par Nelson (1990) qui a montré que le processus GARCH est l'approximation en temps discrèt d'un processus de diffusion. Cette propriété des processus GARCH nous permet d'estimer les paramètres de la diffusion et la volatilité future. Une deuxième approche consiste en utiliser les prix de marché des options, afin d'obtenir les paramètres implicites de la diffusion et la volatilité implicite future.

Dans la section 2 nous étudierons les processus stochastiques suivis par les variables d'état. En appliquant les théorèmes d'Itô et de Girsanov et le principe d'évaluation risque-neutre, nous obtiendrons une équation aux dérivées partielles du second ordre. Dans la section 3 nous démontrerons qu'en utilisant la transformée de Fourier de la fonction du prix de l'actif dérivé, la résolution de l'EDP revient à résoudre une équation différentielle ordinaire. Dans la section 4 nous proposons une formule analytique du prix des options européennes quand la volatilité suit un processus stochastique. Les conclusions sont présentées dans la section 5.

2 L'évaluation risque-neutre des options

Nous considérons un modèle d'évaluation à deux variables d'état. Le prix de l'option européenne dépend du prix de l'actif support et de la volatilité qui suivent les processus stochastiques suivants :

$$\begin{aligned} dS_t &= \phi S_t dt + \sigma_t S_t dw_t && (4) \\ d\sigma_t^2 &= \mu \sigma_t^2 dt + \delta \sigma_t^2 dz_t && (5) \end{aligned}$$

où $t \in [0, \infty)$. La variable ϕ est un paramètre qui dépend de S, σ, et t. Les mouvements browniens w et z sont corrélés entre eux et le coefficient de corrélation est noté ρ ($-1 < \rho < 1$). La volatilité de la volatilité et la moyenne de la variance sont supposées constantes ce qui implique que les variations non-anticipées de la variance soient stationnaires dans le temps.

En appliquant le théorème de Girsanov (ou le théorème du changement de mesure), sous la probabilité risque-neutre Q, le processus de diffusion du prix de l'actif support s'écrit :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dw_t^* \qquad (6)$$

où r représente le taux de l'actif sans risque et w^* est le mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre Q.

En appliquant le lemme de Itô, on obtient :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S^2 \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dw^*$$

Soit $f = \ln S$. Donc, l'équation précédente devient :

$$d(\ln S) = \left(rS \frac{1}{S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2} \right) dt + \sigma S \frac{1}{S} dw_t^*$$

Alors, l'équation différentielle stochastique suivie par le prix de l'actif support est:

$$d(\ln S_t) = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dw_t^* \qquad (7)$$

De même manière, en appliquant le lemme de Itô sur l'équation (5), on obtient :

$$d(\ln \sigma_t^2) = \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) dt + \delta dz_t \tag{8}$$

Nous utilisons dans la modélisation du prix de l'actif dérivé les processus (7) et (8). On va faire les notations: $\ln(\sigma^2) = V$ et $\ln(S) = H$.

On peut écrire que le prix de l'actif dérivé C est une fonction de : $C = f(H, V, t)$. A l'écheance la valeur de l'option call européene est: $C(H_T, V_T, T) = S_T - K = Se^{Y_T} - K$, où $Y_T = \ln S_T - \ln S$ et $\ln(\sigma_T^2) = V_T$ et $\ln(S_T) = H_T$. En développant en série Taylor le prix de l'option call, on obtient :

$$\begin{aligned} C(H;V;t) &= C(H_0;V_0;t_0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{1!}\frac{\partial C}{\partial H}dH + \frac{1}{1!}\frac{\partial C}{\partial V}dV + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}dt^2 \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}dH^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}dV^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C}{\partial t \partial V}dV\,dt + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C}{\partial t \partial H}dtdH \\ &+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial H}dV\,dH + \ldots\ldots \end{aligned}$$

En substituant les expression (7) et (8) dans la formule d'au-dessus et en tenant compte de la table de multiplication, on obtient :

$$\begin{aligned} dC(H;V;t) &= \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial H}\left(r - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial H}\sigma_t dw_t^* + \frac{\partial C}{\partial V}\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) dt + \\ &\frac{\partial C}{\partial V}\delta dz_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\sigma_t^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}\delta^2 dt + \frac{\partial^2 C}{\partial V \partial H}\rho\sigma_t\delta dt \end{aligned}$$

Donc, finalement nous obtenons l'équation différentielle suivante:

$$\begin{aligned} dC(H;V;t) &= (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial H}\left(r - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) + \frac{\partial C}{\partial V}\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\sigma_t^2 + \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}\delta^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial V \partial H}\rho\sigma_t\delta)dt + \frac{\partial C}{\partial H}\sigma_t dw_t^* + \frac{\partial C}{\partial V}\delta dz_t \end{aligned} \tag{9}$$

Maintenant on peut utiliser le générateur infinitésimal associé à la fonction C et à la dynamique de H et V. Le générateur infinitésimal $\mathcal{G}(C)$ est le terme qui correspond à la tendance du processus C:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(C) &= \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial H}\left(r - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) + \frac{\partial C}{\partial V}\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\sigma_t^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}\delta^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial V \partial H}\rho\sigma_t\delta \end{aligned} \tag{10}$$

L'évaluation risque-neutre est, sans doute, la principale méthode d'analyse des produits dérivés. Les variables qui apparaissent dans les équations différentielles stochastiques sont affectées par la préférence pour le risque des investisseurs. Dans un monde où les investisseurs sont neutres au risque, le rendement anticipé des actions est le rendement de l'actif sans risque, r. Donc, nous pouvons conclure que le marché satisfait la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage et que pour tout actif contingent il existe un unique processus de prix tel que le marché ne présente pas d'opportunité d'arbitrage et ce processus de prix est donné par le processus de prix de n'importe quelle stratégie autofinancée qui duplique l'actif dérivé.

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage on peut constituer un portefeuille localement sans risque quand $dt \to 0$. Un portefeuille est localement sans risque lorsque la variance de la plus-value raportée à l'intervalle du temps tend vers zéro quand t tend vers zéro. Cox, Ingersoll et Ross (1981) ont étendu cette analyse au cas de plusieurs variables d'état. Donc, le prix de l'option européenne satisfait l'équation aux dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\mathcal{E}(C)}{C} - r = \sum_{i=1} \gamma_i \frac{\frac{\partial C}{\partial \psi_i}}{C} \tag{11}$$

où $\frac{\mathcal{E}(C)}{C} - r$ représente l'excès de rendement (le rendement instantané de l'actif risqué moins le rendement de l'actif sans risque). $\gamma_i \frac{\frac{\partial C}{\partial \psi_i}}{C}$ représente la prime de risque, γ_i représente le prix du risque (γ_1 est le prix du risque lié à l'actif support et γ_2 est le prix de risque de volatilité). $\frac{\frac{\partial C}{\partial \psi_i}}{C}$ représente la sensibilité du prix C par rapport aux variables d'état H et V (où ψ_i est la variable d'état i). On peut écrire l'équation aux dérivées partielles sous la forme:

$$\mathcal{E}(C) - r = \sum_{i=1} \gamma_i \frac{\partial C}{\partial \psi_i} \tag{12}$$

Donc, en tenant compte de l'équation différentielle stochastique (7) et de la probabilité risque-neutre Q qui caractérise l'évolution du prix de l'actif support ($\gamma_1 = 0$), l'équation aux dérivées partielles devient:

$$\begin{aligned} rC \;=\; & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial H}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\partial C}{\partial V}\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\sigma^2 \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}\delta^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial H \partial V}\rho\sigma\delta \end{aligned} \tag{13}$$

où $\gamma = \gamma_2$ représente le prix de risque de volatilité.

Si nous ne considérons pas que $\alpha = 2$ dans l'équation différentielle stochastique (3), l'EDP deviendra:

$$
\begin{aligned}
rC = {} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial H}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\partial C}{\partial V}\left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\left[\sigma^2\right]^{\alpha-2} - \gamma\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\sigma^2 \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}\delta^2\left[\sigma^2\right]^{\alpha-2} + \frac{\partial^2 C}{\partial H \partial V}\rho\sigma^{\alpha-1}\delta
\end{aligned}
\tag{14}
$$

3 La transformée de Fourier et la liaison entre l'EDP du second ordre et l'EDO

Afin de resoudre l'équation aux dérivées partielles EDP (13), nous utiliserons la transformée de Fourier en supposant que $\alpha = 2$. La transformée de Fourier d'une fonction $X(\beta)$ peut s'écrire dans la manière suivante:

$$
\hat{X}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\beta} X(\beta)\, d\beta \tag{15}
$$

L'inverse de la transformée de Fourier a la forme suivante:

$$
X(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\beta} \hat{X}(\lambda)\, d\lambda \tag{16}
$$

où $i^2 = -1$.
La transformée de Fourier du prix de l'option call européenne est:

$$
\hat{C}(\lambda_H, \lambda_V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H H + \lambda_V V)} C(H, V)\, dH\, dV \tag{17}
$$

L'inverse de la transformée de Fourier du prix de l'option s'écrit :

$$
C(H, V) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_H H + \lambda_V V)} \hat{C}(\lambda_H, \lambda_V)\, d\lambda_H\, d\lambda_V \tag{18}
$$

Théorème[1] : Soit une fonction h qui dépend de deux variables x et y. Soit une équation aux dérivées partielles qui a la forme suivante:

$$
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + ah = 0
$$

[1] voir la démonstration de ce théorème dans l'annexe 1

Les transformées de Fourier de chaque dérivée partielle (notées $\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)}$; $\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}$; $\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)}$; $\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}}$; $\widehat{\frac{\partial h}{\partial y}}$; $\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}}$) et de la fonction h (notée $\hat{h}$) vérifieront l'équation aux dérivées partielles donnée[2]:

$$\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)} + \widehat{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)} + \widehat{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)} + \widehat{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)} + \widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)} + \widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)} + a\hat{h} = 0$$

En considérant l'EDP (13) comme l'équation donnée, nous allons calculer les transformées de Fourier de $\frac{\partial C}{\partial H}; \frac{\partial C}{\partial V}; \frac{\partial^2 C}{\partial H^2}; \frac{\partial^2 C}{\partial V^2}; \frac{\partial^2 C}{\partial H \partial V}$. En tenant compte de l'expression (16), nous faisons l'intégration par parties[3] et nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda_H H+\lambda_V V)} C(H;V)\,dH\,dV \\
&= \frac{1}{i\lambda_H}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda_H H+\lambda_V V)} \frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\,dH\,dV
\end{aligned}$$

On observe que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda_H H+\lambda_V V)} \frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\,dH\,dV$ représente la transformée de Fourier de $\frac{\partial C}{\partial H}$:

Nous notons cette transformée : $\widehat{\left(\frac{\partial C}{\partial H}\right)}$. Donc,

$$\widehat{\left(\frac{\partial C}{\partial H}\right)} = i\lambda_H \hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) \tag{19}$$

De même manière, on démontre que la transformée de Fourier de la dérivée partielle d'ordre n de la fonction C selon H est:

$$\widehat{\left(\frac{\partial C}{\partial H}\right)^n} = (i\lambda_H)^n\, \hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) \tag{20}$$

En utilisant le même algorithme, la transformée de Fourier de $\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}$ est:

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\right)} = -\lambda_H^2 \hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) \tag{21}$$

La transformée de Fourier de $\frac{\partial C}{\partial V}$ est:

[2] voir Laurent Schwartz "Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", Editions Hermann, Paris 1965.

[3] voir l'annexe 2

$$\widehat{\left(\frac{\partial C}{\partial V}\right)} = i\,\xi_V \hat{C}(\xi_H;\xi_V) \tag{22}$$

La transformée de Fourier de $\frac{\partial^2 C}{\partial V^2}$ est:

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial H^2}\right)} = -\xi_V^2 \hat{C}(\xi_H;\xi_V) \tag{23}$$

La transformée de Fourier de $\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial H}$ est:

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial V \partial H}\right)} = -\xi_H \xi_V \hat{C}(\xi_H;\xi_V) \tag{24}$$

En intégrant par parties, nous avons utilisé les hypothèses suivantes:

- $C(H;V;t) = S$ quand $H \to \infty$
- $C(0;V;t) = 0$
- $C(H;V;t) = S$ quand $V \to \infty$
- $\frac{\partial C}{\partial H} = 1$ quand $H \to \infty$
- $\frac{\partial C}{\partial V} = 1$ quand $V \to \infty$

Comme la transformation de Fourier est faite en H et V seulement, pour t fixé, une dérivation partielle en t restera une dérivation partielle en t (plus précisément, la transformée de Fourier de $\frac{\partial C}{\partial t}$ est $\frac{\partial \hat{C}}{\partial t}$). Dans ces conditions, en utilisant la transformée de Fourier de chaque dérivée partielle, l'EDP (13) va être égale à:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} = {} & [\frac{1}{2}\sigma^2 \xi_H^2 + \frac{1}{2}\delta^2 \xi_V^2 + \rho\delta\sigma\, \xi_V \xi_H - i\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\xi_H - \\ & - i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\right) + r]\hat{C}\end{aligned} \tag{25}$$

Cette équation est, en fait, pour tout ξ fixé, une équation différentielle ordinaire. Donc, en passant de t en T, cette équation peut s'écrire:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{C}}{dT} = {} & [\frac{1}{2}\sigma_T^2 \xi_H^2 + \frac{1}{2}\delta^2 \xi_V^2 + \rho\delta\sigma_T\, \xi_V \xi_H - i\left(r - \frac{\sigma_T^2}{2}\right)\xi_H - \\ & - i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\right) + r]\hat{C}\end{aligned} \tag{26}$$

On peut conclure que par l'intermède de la transformée de Fourier, résoudre l'équation aux dérivées partielles (13) revient à trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire EDO. La solution de l'équation (26) est:

$$
\begin{aligned}
\widehat{C}_t &= \widehat{C}_T \exp[-r\tau - \frac{1}{2}\lambda_H^2 \int_t^T \sigma_s^2 ds - \frac{1}{2}\lambda_V^2 \delta^2 \tau - \rho\delta\lambda_H\lambda_V \int_t^T \sigma_s ds \\
&\quad + ir\lambda_H\tau - i\lambda_H \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds + i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\lambda_V\tau]
\end{aligned} \tag{27}
$$

où $\tau = T - t$.

En considérant que dans l'équation (3) α n'est pas égal à 2, la solution de l'EDP (14) sera:

$$
\begin{aligned}
\widehat{C}_t &= \widehat{C}_T \exp[-r\tau - \frac{1}{2}\lambda_H^2 \int_t^T \sigma_s^2 ds - \frac{1}{2}\lambda_V^2 \delta^2 \int_t^T \left(\sigma_s^2\right)^{\alpha-2} ds \\
&\quad - \rho\delta\lambda_H\lambda_V \int_t^T \sigma_s^{\alpha-1} ds + ir\lambda_H\tau - i\lambda_H \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds \\
&\quad + i(\mu - \gamma)\lambda_V\tau - i\lambda_V \frac{\delta^2}{2}\int_t^T \left(\sigma_s^2\right)^{\alpha-2} ds]
\end{aligned} \tag{28}
$$

4 Le prix des options à volatilité stochastique

4.1 La solution de l'EDP

Nous écrivons l'équation (27) sous la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
\widehat{C}_t &= \widehat{C}_T \exp[-r\tau - \frac{1}{2}\lambda_H^2 \widehat{V}\tau - \frac{1}{2}\lambda_V^2 \delta^2 \tau - \rho\delta\lambda_H\lambda_V \overline{V}\tau + \\
&\quad + i\lambda_H \left(r - \frac{\widehat{V}}{2}\right)\tau + i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\lambda_V\tau]
\end{aligned} \tag{29}
$$

où $\widehat{V} = \frac{1}{\tau}\int_t^T \sigma_s^2 ds$ est la moyenne des valeurs futures de la variance et

$\overline{V} = \frac{1}{\tau}\int_t^T \sigma_s ds$ est la moyenne des valeurs futures de l'écart-type.

Afin d'obtenir le prix actuel de l'option, $C(H, V, t)$, on utilise l'inverse de la transformée de Fourier (18) sachant que $\widehat{C}_t$ a été obtenu ci-dessus et que $\widehat{C}_T$ est la transformée de Fourier de $C(H_T, V_T, T) = Se^{Y_T} - K$. Le prix actuel de l'option est donc:

$$
\begin{aligned}
C(H,V,t) = & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^2}\exp(i\lambda_H H + i\lambda_V V)\exp[-r\tau - \frac{1}{2}\lambda_H^2 V\tau \\
& - \frac{1}{2}\lambda_V^2\delta^2\tau - \rho\sqrt{V}\delta\lambda_H\lambda_V\tau + i\lambda_H\left(r - \frac{V}{2}\right)\tau \\
& + i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\lambda_V\tau]\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(\lambda_H H_T + \lambda_V V_T)] \\
& \max(Se^{Y_T} - K, 0)\, dH_T\, dV_T\}\, d\lambda_H\, d\lambda_V
\end{aligned}
\tag{30}
$$

où Y_T est égal à $\ln S_T - \ln S = H_T - H$. En utilisant le théorème de Fubini, le prix de l'option peut s'écrire:

$$
\begin{aligned}
C(H,V,t) = & \exp(-r\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\max(Se^{Y_T} - K, 0)\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}\lambda_H^2 V\tau + \\
& i\lambda_H\left(r - \frac{V}{2}\right)\tau + i\lambda_H H - i\lambda_H H_T)(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}\lambda_V^2\delta^2\tau - \\
& \rho\sqrt{V}\delta\lambda_H\lambda_V\tau + i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\lambda_V\tau + i\lambda_V V - i\lambda_V V_T)\, d\lambda_V) \\
& d\lambda_H]\, dV_T\}\, dH_T
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Par conséquent, le prix de l'option à volatilité stochastique s'écrit:

$$
C(H,V,t) = \exp(-r\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\max(Se^{Y_T} - K, 0)\, I_1 I_2 I_3\, dH_T \tag{32}
$$

Nous allons calculer chaque intégrale. La prémière intégrale I_1 est:

$$
\begin{aligned}
I_1 = & \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}\lambda_V^2\delta^2\tau - \rho\sqrt{V}\delta\lambda_H\lambda_V\tau + i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\lambda_V\tau \\
& + i\lambda_V V - i\lambda_V V_T)\, d\lambda_V
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Nous avons résolu cette intégrale et nous avons obtenu le résultat suivant[4]:

[4] Voir la démonstration dans l'annexe 3

$$I_1 = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{ \frac{\left[\rho\sqrt{V}\delta\lambda_H\tau + i\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right]^2}{2\delta^2\tau} \right\} \tag{34}$$

La deuxième intégrale est:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda_H)\,d\lambda_H \tag{35}$$

où $A(\lambda_H) = \exp\left\{ \frac{\left(\rho\sqrt{V}\delta\lambda_H\tau + i\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right)^2}{2\delta^2\tau} \right\} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_H^2\tilde{V}\tau +\right.$
$\left. + i\lambda_H\left(r - \frac{\tilde{V}}{2}\right)\tau + i\lambda_H H - i\lambda_H H_T\right)$:
La solution trouvée[5] est:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{ \frac{\left[-\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right]^2}{2\delta^2\tau} \right\} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{\tilde{V}2\pi\tau(1-\rho^2)}} \\ &\quad \exp\left\{ -\frac{\left[Y_T - \left(r - \frac{\tilde{V}}{2}\right)\tau - \frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right]^2}{2\tilde{V}\tau(1-\rho^2)} \right\} \end{aligned} \tag{36}$$

La troisième intégrale est:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\frac{\left[\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right]^2}{\delta^2\tau} \right\} dV_T = 1 \tag{37}$$

Nous observons que l'intégrale a la forme suivante: $\int_{-\infty}^{\infty} f(V_T)dV_T$, où $f(V_T)$ prend la forme d'une fonction de densité de la loi normale suivie, donc, par la variable aléatoire V_T. Dans ces conditions, la moyenne de H_T est égale à $\ln\left[\sigma^2\right] + \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau$ et la variance de H_T est égale à $\delta^2\tau$. Forcement, cette intégrale sur l'intervalle d'intégration est égale à 1.

[5] Voir la démonstration dans l'annexe 4

En tenant compte de I_1, I_2 et I_3, le prix de l'option devient:

$$C(H;V;t) = \exp(-r\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{V2\pi\tau(1-\rho^2)}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[Y_T-\left(r-\frac{V}{2}\right)\tau-\frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2}-\left(\mu-\frac{\delta^2}{2}-\gamma\right)\tau\right)\right]^2}{V\tau(1-\rho^2)}\right\}\max(Se^{Y_T}-K;0)\,dY_T \tag{38}$$

Nous observons que dans la formule de prix trouvée on peut déduire la fonction de densité conjointe de $\ln(S_T/S)$. On peut conclure que le prix de l'option call européenne peut être calculé en fonction de la distribution normale conditionnelle du logarithme du prix future de l'actif support. La fonction de densité conditionnelle a la forme suivante:

$$f\left[\ln(S_T/S)\,|\,\ln(\sigma_T^2/\sigma^2)\right] = \frac{1}{\sqrt{V2\pi\tau(1-\rho^2)}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[Y_T-\left(r-\frac{V}{2}\right)\tau-\frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2}-\left(\mu-\frac{\delta^2}{2}-\gamma\right)\tau\right)\right]^2}{V\tau(1-\rho^2)}\right\} \tag{39}$$

L'espérance conditionnelle de $\ln(S_T/S)$ va être:

$$E\left[\ln(S_T/S)\,|\,\ln(\sigma_T^2/\sigma^2)\right] = \left(r-\frac{V}{2}\right)\tau+\frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left[\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2}-\left(\mu-\frac{\delta^2}{2}-\gamma\right)\tau\right] \tag{40}$$

La variance conditionnelle de $\ln(S_T/S)$ va être:

$$VAR\left[\ln(S_T/S)\,|\,\ln(\sigma_T^2/\sigma^2)\right] = V\tau(1-\rho^2) \tag{41}$$

Finalement, nous pouvons énoncer la conclusion que le prix actuel de l'actif dérivé est égal à l'espérance conditionnelle du pay-off de l'option dans les conditions de l'existence d'une distribution normale bi-variée du logarithme du prix de l'actif sous-jacent et de la volatilité. La valeur de l'option est:

$$C(H;V;t) = \exp(-r\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\max(Se^{Y_T}-K;0)\,f\left[Y_T\,|\,\ln(\sigma_T^2/\sigma^2)\right]dY_T \tag{42}$$

4.2 L'équilibre en présence de la volatilité stochastique

Afin d'éliminer la fonction "max" nous changeons les limites de l'intégration dans la formule générale du prix de l'option (38). La fonction "max" implique la condition $Se^{Y_T} \geq K$ qui est équivalente à $\ln S + Y_T \geq \ln K$ ou $Y_T \geq \ln \frac{K}{S}$. En utilisant cette condition l'expression du prix de l'actif dérivé (38) devient:

$$C(H;V;t) = ST_1 - Ke^{-r\tau}T_2 \tag{43}$$

sachant que:

$$T_1 = \int_{\ln\frac{K}{S}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi 2\pi\tau(1-\rho^2)}} \exp(-r\tau)\exp(Y_T) \tag{44}$$
$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[Y_T - \left(r - \frac{\Phi}{2} \right)\tau - \frac{\rho\sqrt{V}}{\delta}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma \right)\tau \right) \right]^2}{\Phi\tau(1-\rho^2)} \right\} dY_T$$

$$T_2 = \int_{\ln\frac{K}{S}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi 2\pi\tau(1-\rho^2)}} \tag{45}$$
$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[Y_T - \left(r - \frac{\Phi}{2} \right)\tau - \frac{\rho\sqrt{V}}{\delta}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma \right)\tau \right) \right]^2}{\Phi\tau(1-\rho^2)} \right\} dY_T$$

En utilisant le fait que $-\ln(K/S)=\ln(S/K)$ et que la distribution conditionnelle qui dépend de deux processus stochastiques est une distribution normale, le deuxième terme T_2 est égal à $N(d_2)$ et le premier terme T_1 est égal à $\exp(d)N(d_1)$, où $N(\cdot)$ représente la fonction cumulative de la loi normale centrée réduite.

Sous l'hypothèse faite initialement, qui implique l'absence d'opportunité d'arbitrage, la formule finale du prix de l'option call européenne est:

$$C(H;V;t) = SN(d_1)\exp(d) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{46}$$

$$d = \frac{\rho\sqrt{V}}{\delta}\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \frac{\rho\sqrt{V}\mu\tau}{\delta} + \frac{\rho\sqrt{V}\delta\tau}{2} + \frac{\rho\sqrt{V}\gamma\tau}{\delta} - \frac{\rho^2\Phi\tau}{2} \tag{47}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r\tau - \frac{\Phi}{2}\tau + \frac{\rho\sqrt{V}}{\delta}\left[\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma \right)\tau \right]}{\sqrt{\Phi(1-\rho^2)\tau}} \tag{48}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r\tau + \frac{\theta}{2}\tau + \frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left[\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right] - \theta\rho^2\tau}{\sqrt{\theta(1-\rho^2)\tau}} \tag{49}$$

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\theta(1-\rho^2)\tau} \tag{50}$$

Si le prix de l'actif sous-jacent n'est pas corrélé avec la volatilité ($\rho = 0$), le prix de l'option call européenne est:

$$C(H;V;t) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{51}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r\tau - \frac{\theta}{2}\tau}{\sqrt{\theta\tau}} \tag{52}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r\tau + \frac{\theta}{2}\tau}{\sqrt{\theta\tau}} \tag{53}$$

En considérant les hypothèses de l'univers de Black et Scholes (il n'y a pas de corrélation entre le prix de l'actif support et la volatilité $\rho = 0$, il n'y a pas de prix du risque de volatilité $\gamma = 0$ et la volatilité est constante dans le temps $\sigma^2 = \sigma^2_{t+1} = \ldots = \sigma^2_T$) le prix de l'option à volatilité stochastique (46) tend vers le prix de Black et Scholes.

Si on considère que $\alpha \neq 2$ la formule générale pour le prix de l'option européenne est:

$$C(H;V;t) = SN(d_1)\exp(d) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{54}$$

$$d = \frac{\rho\sqrt{V}^{3-\alpha}}{\delta}\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \frac{\rho\sqrt{V}^{3-\alpha}\mu\tau}{\delta} + \frac{\rho\sqrt{V}^{\alpha-1}\delta\tau}{2} + \frac{\rho\sqrt{V}^{3-\alpha}\gamma\tau}{\delta} - \frac{\rho^2\theta\tau}{2} \tag{55}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r\tau - \frac{\theta}{2}\tau + \frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}^{3-\alpha}\left[\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\theta^{\alpha-2} - \gamma\right)\tau\right]}{\sqrt{\theta(1-\rho^2)\tau}} \tag{56}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r\tau + \frac{\theta}{2}\tau + \frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}^{3-\alpha}\left[\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2}\theta^{\alpha-2} - \gamma\right)\tau\right] - \theta\rho^2\tau}{\sqrt{\theta(1-\rho^2)\tau}} \tag{57}$$

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\theta(1-\rho^2)\tau} \tag{58}$$

5 Conclusion

Nous avons proposé une formule analytique du prix des options call européennes quand la volatilité est stochastique. Par rapport à la formule de Black-Scholes, cette formule de prix dépend des paramètres du processus de di¤usion suivi par la volatilité (le drift de la volatilité et la volatilité de la volatilité), des volatilités locales (à la date initiale et à la date d'exercice), de la moyenne des volatilités futures, du coe¢ cient de corrélation entre le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité et du prix du risque de volatilité.

A…n de démontrer la formule de prix de l'option, nous avons utilisé la théorie du calcul stochastique qui met en évidence le fait que le marché …nancier est complet et que la condition de l'absence d'opportunité d'arbitrage induit un prix unique pour l'actif contingent qui est égal à l'espérance de la valeur actualisée du ‡ux de l'option sous une unique probabilité risque-neutre. Sous la probabilité risque-neutre, la fonction de densité des prix terminaux de l'actif sous-jacent est conditionnelle aux paramètres du processus de di¤usion suivi par la volatilité et à la volatilité locale initiale et …nale.

Nous pouvons observer que si le coe¢ cient de corrélation entre le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité est nul, la formule de prix trouvée devient la formule de Black-Scholes dont l'écart-type est la moyenne des volatilités futures. Celle-ci peut expliquer l'information predictive contenue dans la volatilité implicite qui est calculée à partir du prix de Black et Scholes. C'est facile à observer que la formule trouvée généralise le cadre de Black et Scholes puisque si la volatilité est constante, le prix obtenu tend vers le prix de Black et Scholes.

Une propriété importante de cette formule est qu'à partir des prix de marché des options, nous pouvons calculer, par l'inversion, la volatilité de l'actif sous-jacent à la date d'exercice ainsi que l'évolution de cette volatilité pendant la durée de vie de l'option, quanti…ée par la moyenne des volatilités futures. Evidemment, la prédiction de la volatilité est possible seulement en absence d'opportunité d'arbitrage ou s'il existe une probabilité risque-neutre.

En conclusion, nous pouvons bien mettre en cause la théorie qui dit que la volatilité stochastique est une source d'incomplétude des marchés et, donc, qu'il ne serait pas possible de …xer le prix de l'option seulement avec l'argument d'arbitrage.

Bibliographie:

Amin K., Ng V.K.(1993) - "Option Valuation with Systematic Stochastic Volatility", Journal of Finance, 48 (3)

Bakshi G., Ch. Cao and Z. Chen, (1997), "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", Journal of Finance 52 (5)

Bakshi G., Ch. Cao and Z. Chen, (2000), "Pricing and Hedging Long-Term Options", Journal of Econometrics 94

Bakshi G., Ch. Cao and Z. Chen, (2000), "Do Call Prices and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction?", Review of Financial Studies 13 (3)

Bakshi G., Madan D. (2000), "Spanning and Derivative-Security Valuation", Journal of Financial Economics 55

Bates D. (1996) - "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Process Implicit in Deutsche Mark Options", Review of Financial Studies 9 (1)

Bergman Y., Grundy B., Wiener Z. (1996) - "General Properties of Option Prices" , Journal of Finance 51 (5)

Black F., Scholes M. (1973) - "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81

Chauveau T. - Evaluation des actifs ...nanciers: Notes de cours, DEA "Monnaie Finance Banque", Université Paris I, 1999-2000

Comte F., Renault E. (1998) - "Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models", Mathematical Finance 8 (4)

Cox J.C., Ross S.A. (1976) - "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics 3

Cox J.C., Rubinstein M. (1985) - Options Markets, Prentice Hall

Das S.R., Sundaram R. (1999) - "Of Smile and Smirks: A Terme Structure Perspective", Journal of Financial and Quantitative Analysis 34 (2)

Demange G., Rochet J.C. (1996) - Méthodes mathématiques de la ...nance, Economica

Du¢e D. (1995) - Modèles dynamiques d'évaluation, PUF Collection Finance

Engle R.F., Kane A., Noh J. (1997) - "Index Option Pricing with Stochastic Volatility and the Value of Accurate Variance Forecasts", Review of Derivatives Research 1

Frey R., Sin C.A. (1999) - "Bounds on European Option Prices Under Stochastic Volatility", Mathematical Finance 9 (2)

Garcia R., Renault E. (1998) - "A Note on Hedging in Arch and Stochastic Volatility Option Pricing Models", Mathematical Finance, 8 (2)

Geske R. (1976) - "The Valuation of Compound Options", Journal of Financial Economics 7

Heston S. (1993) - "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options", The Review of Financial Studies, 6 (2)

Hobson D.G., Rogers L.C.G. (1998) - "Complete Models with Stochastic Volatility", Mathematical Finance, 8 (1)

Hofmann N., Platen E., Schweizer M. - "Option Pricing under Incompleteness and Stochastic Volatility", Mathematical Finance 2

Hull J. (1993) - Options, Futures and Other Derivative Securities, Prentice Hall

Hull J., White A. (1988) - "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility", Advances in Futures and Option Research, 3

Hull J., White A. (1987) - "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", Journal of Finance, 42 (2)

Kendall M., Stuart A. (1977) - The Advanced Theory of Statistics, Fourth Edition, Vol. 1, Macmillan Publishing Company, New York

Karatzas I., Shreve S.E. (1991) - Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition, Springer Verlag

Lamoureux C.G., Lastrapes W.D. (1993) - "Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Implied Volatilities", The Review of Financial Studies, 6 (2)

Loève M. (1963) - Probability Theory, Third Edition, Van Nostrand Company, Princeton

Mannai S. (1995) - De la Microstructure en Général et de la Liquidité en Particulier: Théories et Etudes Empiriques sur le MONEP, Economica

Merton R.C. (1976) - "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous", Journal of Financial Economics, 3

Mittelhammer R. (1996) - Mathematical Statistics for Economics and Business, Springer

Naik V. (1993) - "Option Valuation and Hedging with Jump in the Volatility of Assets Returns", Journal of Finance, 48

Neftci S.(1996) - Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press

Nelson D.B. (1990)- "ARCH Models as Di¤usion Approximations", Journal of Econometrics, 45

Renault E., Touzi N. (1996) - "Option Hedging and Implied Volatilities in a Stochastic Volatility Model", Mathematical Finance, 6

Schwartz L. (1965) - Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Ed. Hermann, Paris

Stein E.M., Stein J.C. (1991) - "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", The Review of Financial Studies, 4 (4)

Taylor S.J. (1994) - "Modelling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study", Mathematical Finance, 4 (2)

Thomas G.H. (1961) - Calculus, Second Edition, Adison-Wesley Publishing Company, London

Wiggins J.B. (1987) - "Option Valuation Under Stochastic Volatility", Journal of Financial Economics, 19

Annexe 1

Nous considérons une fonction h qui dépend de deux variables x et y. On considère une équation aux dérivées partielles qui a la forme suivante:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}+ah=0 \qquad \text{(A.1.1.)}$$

Nous démontrerons que les transformées de Fourier de chaque dérivée partielle (notées $\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)}$; $\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}$; $\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)}$; $\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}}$; $\widehat{\frac{\partial h}{\partial y}}$; $\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}}$) et de la fonction h ($\hat{h}$) vérifieront l'équation aux dérivées partielles donnée:

$$\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)}+\widehat{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)}+\widehat{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)}+\widehat{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\right)}+\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)}+\widehat{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)}+a\hat{h}=0 \qquad \text{(A.1.2.)}$$

En utilisant l'expression de la transformée de Fourier pour chaque terme de l'équation, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\frac{\partial h(x;y)}{\partial t}dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\frac{\partial^2 h(x;y)}{\partial x^2}dxdy \qquad \text{(A.1.3.)}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\frac{\partial^2 h(x;y)}{\partial y^2}dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\frac{\partial^2 h(x;y)}{\partial x\partial y}dxdy\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\frac{\partial h(x;y)}{\partial x}dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\frac{\partial h(x;y)}{\partial y}dxdy\\
&=-a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}h(x;y)dxdy
\end{aligned}$$

On utilise la propriété suivante: $\sum\left(\int\right)=\int\left(\sum\right)$. L'équation (A.1.3.) devient:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\right)dxdy \qquad \text{(A.1.4.)}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} -ae^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}hdxdy
\end{aligned}$$

Maintenant il est facile d'utiliser la propriété de monotonie de l'intégrale. L'équation devient:

$$e^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\right) \qquad \text{(A.1.5.)}$$
$$= -ae^{-i(\lambda_H x+\lambda_V y)}h$$

On peut réduire quelques termes et on a bien obtenu l'équation (A.1.1.):

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}=-ah$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}+ah=0$$

(Q.E.D.)

Annexe 2

Selon la définition, la transformée de Fourier du prix de l'option call européenne peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H H+\lambda_V V)} C(H;V)\,dH\,dV \tag{A.2.1.}$$

En intégrant par parties l'intégrale double, on obtient:

$$\begin{aligned}\hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_V V}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_H H} C(H;V)\,dH\right] dV \qquad \text{(A.2.2.)}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_V V}\left[\left.\frac{e^{-i\lambda_H H}}{-i\lambda_H} C(H;V)\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda_H H}}{i\lambda_H}\frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\,dH\right] dV\end{aligned}$$

En utilisant les conditions présentées dans la section 3 concernant les propriétés du prix de l'option quand le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité tend vers l'infini, respectivement vers zéro, on obtient le résultat suivant:

$$\begin{aligned}\hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) &= \frac{1}{i\lambda_H}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_V V}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_H H}\frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\,dH\right] dV \qquad \text{(A.2.3.)}\\ &= \frac{1}{i\lambda_H}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H H+\lambda_V V)}\frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\,dH\,dV\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda_H H+\lambda_V V)}\frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\,dH\,dV = i\lambda_H\hat{C}(\lambda_H;\lambda_V) \tag{A.2.4.}$$

La premier terme de l'égalité (A.2.4) réprésente la transformée de Fourier de la dérivée partielle du prix de l'option selon le logarithme de la variance. Ainsi, on peut écrire l'expression suivante:

$$\widehat{\left(\frac{\partial C(H;V)}{\partial H}\right)} = i\lambda_H\hat{C}(\lambda_H;\lambda_V)\ (Q.E.D.) \tag{A.2.5.}$$

Le résultat obtenu montre que la transformée de Fourier de la dérivée partielle $\frac{\partial C(H;V)}{\partial H}$ est une fonction linéaire de la transformée de Fourier du prix de l'option C.

Annexe 3

Nous présenterons la résolution de l'intégrale I_1 (expression (33)). L'intégrale a la forme suivante:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2}\lambda_V^2\delta^2\tau - \rho\overline{V}\delta\lambda_H\lambda_V\tau \\ &\quad + i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\lambda_V\tau + i\lambda_V V - i\lambda_V V_T\Big)d\lambda_V \end{aligned} \qquad (A.3.1.)$$

On va ordonner les termes en fonction de puissance:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2}\delta^2\tau\lambda_V^2 - \lambda_V(\rho\overline{V}\delta\lambda_H\tau \\ &\quad + i\lambda_V V_T - i\lambda_V V - i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau)\Big)d\lambda_V \end{aligned} \qquad (A.3.2.)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2}\delta^2\tau\lambda_V^2 - \lambda_V(\rho\overline{V}\delta\lambda_H\tau \\ &\quad + i\lambda_V V_T - i\lambda_V V - i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau)\Big)d\lambda_V \end{aligned} \qquad (A.3.3.)$$

L'expression (A.3.3.) devient:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}a^2\lambda_V^2 - b\lambda_V\right)d\lambda_V \qquad (A.3.4.)$$

où $a^2 = \delta^2\tau$ et $b = \rho\overline{V}\delta\lambda_H\tau + i\lambda_V V_T - i\lambda_V V - i\left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau$

On va classer les termes dans l'expression (A.3.4.) qui devient:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2\lambda_V^2 + 2\lambda_V b)\right)d\lambda_V \qquad (A.3.5.) \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{b^2}{2a^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(a\lambda_V + \frac{b}{a}\right)^2\right)d\lambda_V \end{aligned}$$

Mais,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}(a\lambda_V + \frac{b}{a})^2)d\lambda_V = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \qquad \text{(voir Kendall et Stuart, 1977)}$$

Donc,

$$I_1 = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{b^2}{2a^2}) \qquad \text{(A.3.6.)}$$

En substituant a et b dans le résultat trouvé, on obtient:

$$I_1 = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{\frac{\left[\rho\sqrt{V}\delta\lambda_H\tau + -\left(\ln\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right]^2}{2\delta^2\tau}\right\} \qquad \text{(A.3.7.)}$$

(Q.E.D.)

Annexe 4

Nous présenterons la résolution de l'intégrale I_2 (expression (35)). L'intégrale a la forme suivante:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\theta_H)\,d\theta_H \qquad \text{(A.4.1.)}$$

où

$$A(\theta_H) = \exp\left\{\frac{\left[\rho\sqrt{V}\delta\theta_H\tau + -\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right]^2}{2\delta^2\tau}\right\} \qquad \text{(A.4.2.)}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\theta_H^2\widetilde{V}\tau + -\theta_H\left(r - \frac{\widetilde{V}}{2}\right)\tau + -\theta_H H - \theta_H H_T\right)$$

On va ordonner les termes selon la puissance:

$$A(\theta_H) = \exp\left(\frac{-\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)^2}{2\delta^2\tau} + \frac{1}{2}\rho^2\widetilde{V}\theta_H^2\tau\right. \qquad \text{(A.4.3.)}$$

$$+ -\frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\theta_H\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\theta_H^2\widetilde{V}\tau$$

$$\left.+ -\theta_H\left(r - \frac{\widetilde{V}}{2}\right)\tau + -\theta_H H - \theta_H H_T\right)$$

$$A(\theta_H) = \exp\left(\frac{-\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)^2}{2\delta^2\tau}\right)\exp\Big(-\frac{1}{2}\widetilde{V}\tau(1 - \rho^2)\theta_H^2 \qquad \text{(A.4.4.)}$$

$$-\theta_H\left(H_T - H - \left(r - \frac{\widetilde{V}}{2}\right)\tau - \right.$$

$$\left.\frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right)\Big)$$

L'intégrale devient:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi\delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(\frac{-\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)^2}{2\delta^2\tau}\right) \qquad \text{(A.4.5.)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}a^2\theta_H^2 - \theta_H b\right)d\theta_H$$

où $a^2 = V\tau(1-\rho^2)$
$b = H_T - H - \left(r - \frac{V}{2}\right)\tau - \frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)$
On obtient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}a^2\lambda_H^2 - i\lambda_H b\right)d\lambda_H = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{b^2}{2a^2}\right) \qquad \text{(A.4.6.)}$$

En substituant les valeurs de a et b, on obtient:

$$I_2 = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{\frac{\left[-\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right]^2}{2\delta^2\tau}\right\} \qquad \text{(A.4.7.)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{V2\pi\tau(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{\left[Y_T - \left(r - \frac{V}{2}\right)\tau - \frac{\rho}{\delta}\sqrt{V}\left(\ln\frac{\sigma_T^2}{\sigma^2} - \left(\mu - \frac{\delta^2}{2} - \gamma\right)\tau\right)\right]^2}{2V\tau(1-\rho^2)}\right\}$$

Donc, on a bien obtenu l'expression (36). (Q.E.D.)